1 Zatvorene trajektorije i granični cikl dvodimenzionalnog DS

Definicija 1. Granični cikl dinamickog sistema je zatvorena fazna trajektorija γ tog sistema, za koju postoji okolina sa faznim trajektorijama po kojima se fazne tačke neograničeno približavaju krivoj γ kada $t \to +\infty$ ili $t \to -\infty$.

♣ Ako se sve fazne trajektorije približavaju graničnom ciklu kad $t \to +\infty$ (sa spoljne i sa unutrašnje strane), granični cikl je stabilan.

♣ Ako se sve fazne trajektorije približavaju graničnom ciklu kad $t \to -\infty$ (sa spoljne i sa unutrašnje strane), granični cikl je nestabilan.

♣ Ako se fazne trajektorije približavaju graničnom ciklu sa jedne strane kad $t \to +\infty$, a sa druge strane kad $t \to -\infty$, granični cikl je polustabilan.

1.1 Nepostojanje graničnog cikla DS

♣ ***Gradijentni sistemi***

Definicija 2. Dinamički sistem je gradijentni ako postoji funkcija $G \in C^2(E)$ tako da je

$$f(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x,y), \quad g(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y}(x,y).$$

Teorema 1.1. *U gradijentnim dinamičkim sistemima ne postoje zatvorene trajektorije.*

♣ ***Dulacov kriterijum***

Teorema 1.2. *Ako su funkcije $f, g \in C^1(D)$, gde je D jednostruko povezana oblast u faznoj ravni, i postoji funkcija $v \in C^{(1)}(D)$, tako da funkcija*

$$div(vX) = \frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial y}(vg)$$

ne menja znak u D, tada dinamički sistem u oblasti D nema zatvorenih trajektorija.

♣ ***Funkcija Ljapunova***

Posmatrajmo DS $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$, sa položajem ravnoteže (x_0, y_0) i $f, g \in C^1(E)$.

Definicija 3. Funkcija $V(x,y)$ neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda u okolini $O((x_0,y_0))$ tačke (x_0,y_0), naziva se funkcija Ljapunova datog DS ako je

1) $V(x_0,y_0) = 0$;

2) pozitivno definitna tj. $V(x,y) > 0$ za svako $(x,y) \in O((x_0,y_0)), (x,y) \neq (x_0,y_0)$;

3) $\dfrac{dV(x(t),y(t))}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \dfrac{\partial V}{\partial y} g(x,y) \leq 0, (x,y) \in O((x_0,y_0)), (x,y) \neq (x_0,y_0)$

Uslovi (1) i (2) znače da je funkcija Ljapunova pozitivno definitna, dok uslov (3) znači da je funkcija Ljapunova nerastuća duž trajektorija.

Teorema 1.3. *Ako postoji funkcija Ljapunova DS za koju je*

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y) < 0, \quad (x,y) \in O((x_0,y_0)), \ (x,y) \neq (x_0,y_0),$$

onda taj DS nema zatvorenih trajektorija.

♣ ***Indeks položaja ravnoteže DS***

Definicija 4. Neka je dat DS $X' = F(X)$ i zatvorena, glatka kriva C bez samopreseka koja ne prolazi kroz položaj ravnoteže vektorskog polja. Ako se tačka kreće po krivoj C u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu i ponovo dodje u početni položaj, tangantni ugao dobija priraštaj $\triangle\phi = 2n\pi$. Neka je $[\phi]_C$ najveći ceo broj promena ugla ϕ za jedan ceo krug. Tada broj

$$I_C = \frac{[\phi]_C}{2\pi}$$

nazivamo indeks zatvorene krive C u odnosu na vektorsko polje F.

Definicija 5. Broj I_C je najveći ceo broj obrtaja u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu koji napravi vektorsko polje dok tačka X predje jedan pun krug duž krive C u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu.

Pokazuje se da je indeks zatvorene krive koja okružuje PR ne zavisi od same krive, već od tipa PR. Tako se pokazuje da je $I_C = +1$ u slučajevima kada kriva C okružuje stabilan ili nestabilan čvor, stabilan ili nestabilan fokus i centar, dok je $I_C = -1$ ako kriva C okružuje sedlo. Ako kriva C ne okružuje ni jedan položaj ravnoteže, $I_C = 0$. Takodje, pokazuje se da je indeks graničnog cikla jednak $I_C = +1$, pa tako zaključujemo da granični cikl mora da okružuje bar jedan PR. Granični cikl ne može da okružuje samo sedlo.

1.2 Egzistencija graničnog cikla DS

Definicija 6. Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je invarijantan skup DS $X' = F(X)$, ako za proizvoljno rešenje $X(t)$ DS koje polazi iz tačke $X(t_0) \in S$, važi da je $X(t) \in S$ za svako $t \geq t_0$.

Za invarijantnost videti primer 4.10.

Teorema 1.4 (Poenkare-Bendikson)**.** *Neka važi:*

1) $\mathcal{R}$ je zatvoren i ograničen podskup fazne ravni;

2) $X' = F(X)$ je neprekidno, diferencijabilno vektorsko polje na otvorenom skupu sadržanom u $\mathcal{R}$;

3) $\mathcal{R}$ ne sadrži nijedan položaj ravnoteže;

4) postoji fazna trajektorija γ koja u početnom momentu t_0 polazi iz neke tačke oblasti $\mathcal{R}$ i ostaje u $\mathcal{R}$ za svako $t > t_0$.

Tada je γ ili zatvorena trajektorija ili se spiralno približava zatvorenoj trajektoriji DS. U oba slučaja , postoji granični cikl u $\mathcal{R}$.

Videti primer 4.12.

Teorema 1.5 (Poenkare)**.** *Neka u faznoj ravni postoji prsten $\mathcal{R}$ ograničen dvema glatkim krivama L_1 i L_2, koji ne sadrži položaj ravnoteže DS. Ako sve fazne trajektorije, presecajući L_1 i L_2 ulaze u $\mathcal{R}$, za $t > 0$, tada u $\mathcal{R}$ postoji najmanje jedan granični cikl.*